



# Models of Multi-Response Optimization Design and Applications

Li Zhang<sup>1,\*</sup>, Nguyen The Kien<sup>2</sup>

<sup>1</sup>School of Mathematics and Statistics, Changshu Institute of Technology, Suzhou, China

<sup>2</sup>Faculty of Development Economics, University of Business and Economics, Vietnam National University (VNU), Hanoi, Vietnam

## Email address:

zhang2006@cslg.edu.cn (Li Zhang), nguyenthekien@vnuedu.vn (Nguyen The Kien)

\*Corresponding author

## To cite this article:

Li Zhang, Nguyen The Kien. Models of Multi-Response Optimization Design and Applications. *Asia-Pacific Journal of Management Science and Engineering*. Vol. 2, No. 1, 2023, pp. 1-7.

**Received:** December 5, 2022; **Accepted:** December 27, 2022; **Published:** March 9, 2023

**Abstract:** With the rapid development of science and technology and the continuous intensification of globalization, many industries in China have been continuously transformed and upgraded from traditional industries to high-end intelligent manufacturing industries. China's scientific and technological revolution is ongoing and fruitful. Chinese industrial enterprises are also ambitious and attach great importance to technological improvement and management quality control and improvement. More and more high-tech talents are entering large and medium-sized high-tech enterprises in various fields in China. They are young and have a wealth of knowledge and management skills. They will enhance the quality management level of enterprises after practice in the actual work. In this process, enterprises pay more attention to the quality and quality control of products. Response surface method is an important method in quality control technology. Multiple Response Surface problem (MRO) is an important class of response surface methods. Aiming at a kind of MRO problem in engineering, the engineering background of this kind of problem is analyzed firstly, and then the corresponding mathematical model is analyzed and discussed. Combined with the optimization technology, the objective function and constraint conditions are properly processed. Then the non-monotone trust region algorithm is applied to deal with the multi-peak function and the optimal design results of the problem are obtained. Compared with the calculation results of other methods, the results are significantly improved.

**Keywords:** Response Surface Method, Quality Control, Non-Monotone Trust Region Algorithm, Overall Satisfaction Function

## 多响应优化设计的模型和应用

张立<sup>1\*</sup>, 阮世坚<sup>2</sup>

<sup>1</sup>常熟理工学院数学与统计学院, 苏州, 中国

<sup>2</sup>越南河内国家大学下属经济大学经济发展系, 河内, 越南

## 邮箱

zhang2006@cslg.edu.cn (张立), nguyenthekien@vnuedu.vn (阮世坚)

**摘要:** 随着科技快速发展和全球化的不断加剧, 我国很多产业从传统产业不断地向着高端智能制造产业转变和升级。中国科技革命不断进行并且成果丰富。中国工业企业雄心勃勃并且对于技术进步和质量控制的改善和提速十分重视。越来越多高科技人才进入中国各个领域中的大中型高科技企业。他们年轻技术强并且有丰富的管理技能。在实际工作后他们将提升工业企业的质量控制水平。这个过程中, 企业更加重视产品的质量和质量控制。响应面方法是质量控制技术中的

重要方法。多响应面问题 (MRO) 是响应面方法其中重要的一类。针对工程中一类MRO问题, 首先分析了该类问题的工程背景, 然后对其相应的数学模型进行了分析和讨论。结合优化的技术, 对目标函数和约束条件进行适当的处理, 应用非单调信赖域算法来处理多峰函数, 得到该问题优化设计的结果。和其他方法的计算结果比较, 效果有明显的提升。

**关键词:** 响应面方法, 质量控制, 非单调信赖域算法, 总体满意度函数

## 1. 引言

随着经济快速发展和全球化进程的加剧, 国际市场竞争变得十分激烈。在这个进程中, 我国制造业的迅速崛起, 从传统产业向着智能制造产业迈进。在这个复杂转变中, 制造业如何以高质量、低成本、短周期而获得竞争优势, 这个问题逐步成为了我国甚至全球工业界和学术界密切关注的问题。特别是进入21世纪以来, 质量得到了前所未有的重视, 著名质量专家朱兰曾说过“20世纪是生产力的世纪, 21世纪将是质量的世纪”[1]。从现代质量工程的观点来看, 产生质量问题的根本原因是波动 (Variation)[2]。这个问题也在文献[3]被罗国勋等相关学者所讨论。所谓波动就是差异、偏差, 尽管无法完全消除波动, 但我们可以减小和控制它。讲究质量就要讲究质量控制。要把质量控制做好, 就要仔细研究相关的质量控制技术。而在质量控制技术中, 响应面方法是其中的重要方法。

响应面方法 (Response Surface Method, RSM) 就是由一组实验统计设计技术 (DOEs), 实证模型和数值优化组成的系统。Myers和Montgomery (2002) [13]、Box和Draper (2007) 详细描述了各种RSM技术和其应用案例。如果有多个反应涉及, 确定最优设置设计变量需要同时考虑所有因素。这些反应是因为它们不完全一致, 部分发生冲突。这类问题叫做多响应面问题 (MRO)。经过了许多学者的研究, 他们提出了一些好的方法来处理这一类多响应优化问题 (MRO)。

Derringer等人 (1980、1994) [5, 6]提出了期望函数来刻画多响应优化问题 (MRO)。Kim和Lin (2000) [10]、Jeong 和 Kim[11]、He等人 [7, 15]在Derringer等人研究成果的基础上, 提出了改进, 发展了这一类方法。Khuri和Conlon (1981)[9]提出广义距离的方法来处理这个问题。Pignatiello在1993年[14]则另辟蹊径, 采用了损失函数法来处理工程上的多响应优化问题 (MRO)。正如Kim和Lin (2006) 指出的, 多响应优化问题 (MRO) 包括三个阶段: 数据收集 (设计)、模型构建和优化。这些方法的一般目的是转换多响应优化问题 (MRO) 将目标函数分解为单个聚合函数, 然后构造一种求解最优解的有效算法。对于工程中多响应优化设计 (MRO) 问题, 既考虑了最优性, 又考虑了最优性解决方案的鲁棒性。He (2010) [7]指出根据某些标准 (如合意性) 的最优解可能不具有鲁棒性, 并提出了一个考虑最优性的解决方案。Goethals[8]在2011年开发了一个稳健的设计, 面向时间的动态质量特征

的方法目标配置文件。He等人[15]提出了一种混合算法, 通过将遗传算法 (GA) 与模式耦合实现启发式搜索 (PS) 过程, 寻找鲁棒最优解。

但是在上面的这些学者提出的方面中, 在计算具体的生产因素的数值时, 往往碰到相关的问题。第一, 问题的目标函数或约束条件中往往涉及到一些光滑性不佳的函数, 例如分段函数, 绝对值函数等, 部分点的导数或者梯度难以计算; 第二, 总体满意度函数的表达涉及多个和生产相关的因素 (自变量), 函数往往会出现多个局部最优解的情况。一些算法在迭代计算后, 可能会在某个局部最优解停止, 从而忽略了其他局部最优解或者整体局部最优解, 计算效果达不到整体最优。针对某一类MRO问题, 论文主要对总体期望函数的模型和计算进行研究。结合相关优化的技术, 我们对目标函数和约束条件进行适当的处理, 然后调用非单调信赖域算法来处理多峰函数, 得到该问题优化设计的结果。同时我们对多响应优化问题 (MRO) 的具体问题的工程背景和数学模型进行了分析和讨论。并对工程中某一具体MRO问题进行了计算和对比, 发现总体满意度数值比Derringer等人[6]的结果以及He等人[15]的结果有了明显的提高。

## 2. 工程中的一类MRO问题

设  $y(x)$  是一个反映某工业过程的函数或其近似表达,  $x$  是  $n$  维变量, Derringer等人 (1990, 1984年[6]) 讨论这个问题,

$$d_i = \begin{cases} 1, & y_i \text{ 在合理范围内} \\ 0, & y_i \text{ 不在合理范围内} \end{cases} \quad (1)$$

从而得到总体期望函数如下:

$$D = D(d_1(y_1(x)), d_2(y_2(x)), \dots, d_n(y_n(x))) \\ = \left[ \prod_{i=1}^n (d_i(y_i(x)))^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_i}} \quad (2)$$

这里  $n$  是工程涉及的变量个数, 也是  $x$  的维数。这里  $y_i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 是测量出的函数分量, 不一定完全确定的, 有时通过实验数据和机理分析综合得到的。

于是变量设计应该极大化下面的函数:

$$D = D(d_1(y_1(x)), d_2(y_2(x)), \dots, d_n(y_n(x))) = \left[ \prod_{i=1}^n (d_i(y_i(x)))^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_i}} \quad (3)$$

在RSM中, 通常认为函数 $y(x)$ 与自变量 $x$ 的关系是二次型较为合适, 具体表达如下:

$$y(x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \beta_{ii} x_{ii} + \sum_{i < j}^n \beta_{ij} x_i x_j, \quad (4)$$

于是向量 $z(x)$  如下:

$$z(x) = (1, x_1, \dots, x_n, x_1^2, \dots, x_n^2, x_1 x_2, x_1 x_3, \dots, x_1 x_n, x_2 x_3, \dots, x_{n-1} x_n)^T. \quad (5)$$

这样函数 $y(x)$  可以表示为如下的形式:

$$y(x) = z(x)^T \beta, \quad Y = y(x) + \varepsilon. \quad (6)$$

这里,  $Y$ 是工业工程中的观测值,  $\varepsilon$ 是误差项, 并且 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ 。这样的话,

$$E(Y(x)) = y(x), \quad (7)$$

通过计算, 于是得到:

$$\hat{y}(x) = z(x)^T \hat{\beta}, \quad \hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y, \quad (8)$$

这里的 $X$  是实验数据矩阵或向量。进一步, 我们可以得到:

$$Se[\hat{y}(x)] = \sqrt{\hat{\sigma}^2 Z(x)^T (X^T X)^{-1} Z(x)}. \quad (9)$$

于是 $(1 - \alpha)$ 置信区间关于真实反映值(或平均反映值)可以用下面的表达式来表示:

$$[y_L(x), y_R(x)] = [\hat{y}(x) \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n_1 - p} \sqrt{\hat{\sigma}^2 z(x)^T (X^T X)^{-1} z(x)}], \quad (10)$$

这里 $t_{\frac{\alpha}{2}, n_1 - p}$ 是关于 $t$ 分布带有 $(n_1 - p)$ 个自由度的 $(1 - \frac{\alpha}{2})$ 分位数。这里 $n_1$ 是实验运行的数量,  $p$ 是待估计的参数的数目。

设定函数 $Q(x) = [y_{L_1}(x), y_{U_1}(x)] \times [y_{L_2}(x), y_{U_2}(x)] \times \dots \times [y_{L_l}(x), y_{U_l}(x)]$ , 这个可以看作参数的可行域, 然后在区域 $Q(x)$ 中, 考虑下面的优化问题:

$$D_R(x) = \min_{\eta} \{D(d_1(\eta_1), d_2(\eta_2), \dots, d_l(\eta_l)) | (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l) \in Q\}, \quad (11)$$

结合上面的表达式, 可以得到:

$$D_R(x) = \min_{\eta} \{D(d_1(\eta_1), d_2(\eta_2), \dots, d_l(\eta_l)) | (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l) \in Q\} = \min \left\{ \left( \prod_{i=1}^l d_i(\eta_i)^{\omega_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^l \omega_i}} \right\}. \quad (12)$$

其中, 函数 $d_{R_i}(x)$ 和 $D_R(x)$ 如下:

$$d_{R_i}(x) = \min \{d_i(\eta_i) | \eta_i \in [y_{L_i}(x), y_{U_i}(x)]\}, \quad (13)$$

所以

$$D_R(x) = \min_{\eta} \{D(d_1(\eta_1), d_2(\eta_2), \dots, d_l(\eta_l)) | (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l) \in Q\} = \left( \prod_{i=1}^l (d_{R_i}(x))^{\omega_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^l \omega_i}} \quad (14)$$

$d_{R_i}(x)$ 具体的表达式有下面的一些形式。

(a) *NTB*型,  $d_{R_i}(x)$ 具体表示如下:

$$d_{R_i}(x) = \begin{cases} 0, & \hat{y}_i < L_i \\ \left( \frac{\hat{y}_i - L_i}{T_i - L_i} \right)^{s_i}, & L_i \leq \hat{y}_i \leq T_i \\ \left( \frac{U_i - \hat{y}_i}{U_i - T_i} \right)^{t_i}, & T_i \leq \hat{y}_i \leq U_i \\ 0, & \hat{y}_i > U_i \end{cases} \quad (15)$$

(b) *LTB*型,  $d_{R_i}(x)$ 具体表示如下:

$$d_{R_i}(x) = \begin{cases} 0, & \hat{y}_i < L_i \\ \left( \frac{\hat{y}_i - L_i}{T_i - L_i} \right)^{s_i}, & L_i \leq \hat{y}_i \leq T_i \\ 1, & \hat{y}_i > T_i \end{cases} \quad (16)$$

(c) *STB*型,  $d_{R_i}(x)$ 具体表示如下:

$$d_{R_i}(x) = \begin{cases} 0, & \hat{y}_i < T_i \\ \left( \frac{U_i - \hat{y}_i}{U_i - T_i} \right)^{t_i}, & T_i \leq \hat{y}_i \leq U_i \\ 1, & \hat{y}_i > U_i \end{cases} \quad (17)$$

结合上面三种模型下, 本文提出计算 $d_{R_i}(x)$ 的表达形式, 具体如下:

$$d_{R_i}(x) = \begin{cases} d_i[y_{L_i}(x)], & |y_{L_i}(x) - T_i| \geq |y_{U_i}(x) - T_i| \\ d_i[y_{U_i}(x)], & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

### 3. MRO问题的模型

Mongometr[12]提出了一个工程中的实际问题。其中的自变量有两个: 反应时间 $x_1$ 和反应温度 $x_2$ 。同时它的观测函数有三个分量: 场值 $y_1$ 、粘度 $y_2$ 和分子量 $y_3$ 。通过CCD设计, 得到了一份具体数据, 详见表1。其中,  $\xi_1$ 、 $\xi_2$ 代表原始观测值,  $x_1$ 、 $x_2$ 代表变换后的数值,  $y_1$ 、 $y_2$ 和 $y_3$ 代表反应值。

表1 实验数据表。

	$\xi_1$	$\xi_2$	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
第1次	80	170	-1	-1	76.5	62	2940
第2次	90	170	1	-1	78.0	66	3680
第3次	80	180	-1	1	77.0	60	3470
第4次	90	180	1	1	79.5	59	3890
第5次	77.93	175	-1.414	0	75.6	71	3020
第6次	92.07	175	1.414	0	78.4	68	3360
第7次	85	167.93	0	-1.414	77.0	57	3150
第8次	85	182.07	0	1.414	78.5	58	3630
第9次	85	175	0	0	79.9	72	3480
第10次	85	175	0	0	80.3	69	3200
第11次	85	175	0	0	80.0	68	3410
第12次	85	175	0	0	79.7	70	3290
第13次	85	175	0	0	79.8	71	3500

由这批数据，拟合得到的公式如下：

$$\hat{y}_1(x) = 79.940 + 0.995x_1 + 0.515x_2 - 1.376x_1^2 - 1.001x_2^2 + 0.250x_1x_2, (\hat{\sigma}_1 = 0.266)$$

$$\hat{y}_2(x) = 70.000 - 0.155x_1 - 0.948x_2 - 0.688x_1^2 - 6.688x_2^2 - 1.250x_1x_2, (\hat{\sigma}_2 = 2.275)$$

$$\hat{y}_3(x) = 3386.15 + 205.10x_1 + 177.35x_2, (\hat{\sigma}_3 = 165.65)$$

对于这三个反应观测值 $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$ ，应该在下面的范围中：

$$\begin{cases} \hat{y}_1 \geq 78.5 \\ 62 \leq \hat{y}_2 \leq 68 \\ \hat{y}_3 \leq 3450 \end{cases} \quad (19)$$

通过该范围得到自变量 $x_1, x_2$ 的范围如下图所示：

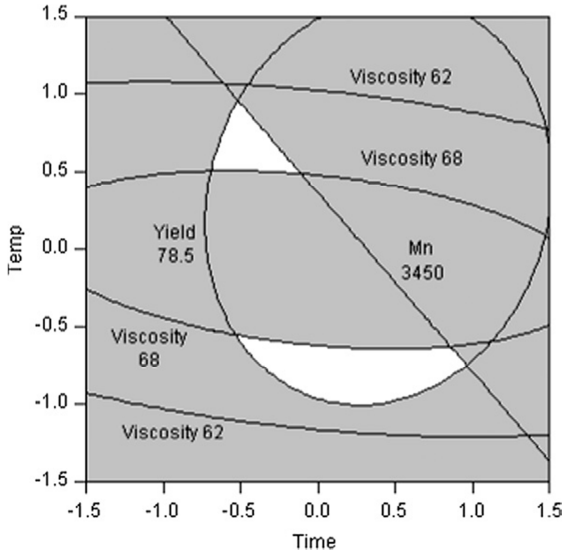


图1 反应时间和反应温度的可行区域。

其中，*Time*代表反应时间 $x_1$ ，*Temp*代表反应温度 $x_2$ ，*Yield*代表反应场状态 $y_1$ ，*Viscosity*代表粘性 $y_2$ ，*Mn*代表反应物质的化学分子量 $y_3$ 。所以可行域是上面图形中左上和右下两块不相邻的区域。

根据工程要求， $y_1$ 应该大于78.5 (L1)， $y_2$ 在62 (L2)到68 (U2)之间， $y_3$ 小于3450 (U3)；这些响应的目标值分别 $y_1$ 为80 (T1)、 $y_2$ 为65 (T2)分别是 $y_3$ 为3100 (T3)。根据分析者和工程应用的具体情况，提出了总体满意度函数：

$$D_R(x) = \left( \prod_{i=1}^l (d_{R_i}(x))^{\omega_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^l \omega_i}} = (d_{R1})^{0.7} (d_{R2})^{0.2} (d_{R3})^{0.1} \quad (20)$$

这里三个权重参数： $\omega_1 = 0.7, \omega_2 = 0.2, \omega_3 = 0.1$ 。

#### 4. MSO问题的计算方法

分析上面工程中的问题，得到了如下的优化模型：

$$\min D_R(x) = \left( \prod_{i=1}^l (d_{R_i}(x))^{\omega_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^l \omega_i}}$$

$$s.t. \begin{cases} \hat{y}_1 \geq 78.5 \\ 62 \leq \hat{y}_2 \leq 68 \\ \hat{y}_3 \leq 3450 \end{cases}$$

针对上面的这个形式，首先将之转化为无约束优化问题。

首先把约束条件写成下面的形式：

$$\begin{cases} g_1(x) = \hat{y}_1 - 78.50 \geq 0 \\ g_2(x) = \hat{y}_2 - 62 \geq 0 \\ g_3(x) = -\hat{y}_2 + 68 \geq 0 \\ g_4(x) = -\hat{y}_3 + 3450 \geq 0 \end{cases}$$

对上面的这个问题，建立目标函数如下：

$$f(x) = D_R(x) + \theta B(x), x \in \text{int } S \quad (21)$$

其中 $B(x)$ 是连续函数，当点 $x$ 趋于可行域的边界时， $B(x) \rightarrow +\infty$ 。这里， $\theta$ 通常取很小的正数。

根据这个MRO问题的具体形式，我们提出函数 $B(x)$ 的形式如下：

$$B(x) = -\sum_{i=1}^4 \ln g_i(x), \quad (22)$$

这样的话，当 $x$ 趋于可行域的边界时， $f(x) = D_R(x) + \theta B(x)$ 的取值趋于正无穷大，所以此时的 $x$ 的值不是极小值点。这里 $\theta$ 越小， $f(x) = D_R(x) + \theta B(x)$ 的最优解就越接近原问题 $D_R(x)$ 的最优解，所以这里 $\theta$ 取一个严格单调下降

并且趋于零的序列 $\{\theta_k\}$ , 当然使得 $\theta$ 随着迭代过程而不断减少。我们采用如下的计算序列:

$$\theta_k = \frac{1}{2^k}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

这个形式符合我们的要求, 同时也使得计算比较方便。

重要性质: 在一个非等式约束的优化问题中, 可行域内部 $\text{int } S$ 非空, 且存在最优解。又设对每一个 $\theta_k$ , 函数 $f(x) = D_R(x) + \theta_k B(x)$ 在 $\text{int } S$ 存在极小点, 并且该方法产生 $f(x)$ 的全局极小点序列 $\{x^{(k)}\}$ 存在子序列收敛到 $x^*$ , 则 $x^*$ 也是原问题 $D_R(x)$ 全局极小点, 即是原问题的全局最优解。

注记: 这个性质的证明可以参看孙文瑜和袁亚湘的著作[4]中第十章第2节相应的部分。

针对这个形式, 在进行适当的数学处理后, 我们调用前面的算法NNMTR, 具体的算法NNMTR描述如下:

Step 0 给定初始点 $x_0 \in R^n$ , 给出一些参数:  
 $\varepsilon > 0, 0 < \eta < 1, 0 < \eta_1 < \eta_2 < 1, 0 \leq \lambda \leq 1$ ,

$0 < \gamma_1 < \gamma_2 \leq 1 \leq \gamma_3$ , 信赖域初始半径:  $\Delta_0 > 0$ 。常数 $M$ 是一个非负整数, 设 $k = 0, m(0) = 0$ 并且计算:  
 $f_0 = f(x_0)$ 。

Step 1 计算:  $g_k = \nabla f(x_k)$ 。如果 $\|g_k\| < \varepsilon$ , 取 $x^* = x_k$ , 然后停止程序, 输出相关数据。否则计算 $B_k$ 并且重新定义模型函数。

Step 2 求解信赖域子问题, 得到解 $s_k$ 。

Step 3 计算 $f(x_k + s_k)$ 和 $r^*(k)$ 如下:

$$r^*(k) = \frac{f_l(k) - f(x_k + s_k)}{m_k(x_k) - m_k(x_k + s_k)} \quad (24)$$

表2 相关参数的结果。

	反应	类型	$L_i$	$y_{Li}$	$\hat{y}_i$	$Y_{Ri}$	$U_i$
第一行	$y_1$	LTB	78.5	79.127	79.319	78.936	—
第二行	$y_2$	STB	62	65.564	67.201	68.838	68
第三行	$y_3$	NTB	—	3200.6	3298.9	3397.3	3450

这个方法得到的结果不是很好: 第一, 关于 $y_2$ 计算的区间 $[y_{L2}, y_{U2}] = [67.089, 68.687]$ , 其中 $y_{U2} = 68.687 > U_2 = 68$ , 超出了合理的范围; 第二, 总体满意度 $\hat{D} = 0.4085$ 比较大, 效果不好。

这里

$$f_{l(k)} = \max\{F_0, F_1\} \quad (25)$$

$$F_0 = \max_{0 < j < m_1} f(x_j), \quad (26)$$

$$F_1 = \frac{f(x_{m_1(k)+1}) + f(x_{m_1(k)+2}) + \dots + f(x_{m(k)})}{(m(k) - m_1(k))}. \quad (27)$$

于是下一个迭代点这样得到:

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + s_k, & r^* \geq \eta_1 \\ x_k, & r^* < \eta_1 \end{cases} \quad (28)$$

接着按照下面的方法调整信赖域半径:

(S1) 如果 $r^*(k) < \eta_1$ , 取 $\Delta_{k+1} \in (0, \gamma_1 \Delta_k]$ ;

(S2) 如果 $r^*(k) \in [\eta_1, \eta_2)$ , 取 $\Delta_{k+1} \in (\gamma_1 \Delta_k, \Delta_k]$ ;

(S3) 如果 $r^*(k) \geq \eta_2$ , 取 $\Delta_{k+1} \in (\Delta_k, \min\{\gamma_2 \Delta_k, \Delta_0\}]$ ;

Step4 (参数更新步): 计算得到 $B_{k+1}$ , 然后更新模型函数, 令 $k = k + 1$ , 回到Step2。

## 5. MRO问题的计算结果

Derringer[6]提出相应的方法, 得到上面MRO问题的一组解: 反应时间 $x_1 = -0.2852$ , 反应温度 $x_2 = 0.6157$ ,  $\hat{D} = 0.4085$ 。其他相关参数的结果如表2所示。

我国学者何祯等人在文献[15]中提出了鲁棒性方法, 通过GA算法得到另外的一组解, 总体满意度 $\hat{D} = 0.1071$ , 效果得到了改进。这组解具体如下: 反应时间 $x_1 = 0.1723$ , 反应温度 $x_2 = -0.8516$ ,  $\hat{D} = 0.1071$ 。其他相关参数的结果如表3所示。

表3 鲁棒性方法计算的相关参数。

反应值	类型	$L_i$	$y_{Li}$	$\hat{y}_i$	$Y_{Ri}$	$U_i$
$y_1$	LTB	78.5	78.669	78.869	79.070	—
$y_2$	STB	62	64.380	66.094	67.808	68
$y_3$	NTB	—	3165.5	3270.5	3375.5	3450

通过本文提出的非单调信赖域算法, 计算得到另外一组解如下: 反应时间 $x_1 = 0.1205$ , 反应温度 $x_2 = -0.9785$ ,  $\hat{D} = 0.0785$ 。其他相关参数的结果如表4所示。

表4 非单调信赖域算法的计算结果。

反应值	类型	$L_i$	$y_{Li}$	$\hat{y}_i$	$Y_{Ri}$	$U_i$
$y_1$	LTB	78.5	78.512	78.544	78.758	—
$y_2$	STB	62	62.928	64.624	66.325	68
$y_3$	NTB	—	3133.1	3270.5	3375.5	3450

这时，总体满意度函数的数值是 $\hat{D} = 0.0785$ ，比Derringer等人[6]得到总体满意度 $\hat{D} = 0.4085$ 有很大的改善，同时比何祯等人[15]得到总体满意度 $\hat{D} = 0.1071$ 也有

了进一步的提升，同时得到的三个反应值的上下界也全部在原来设定的合理范围内。

同时对于不同的 $\alpha$ 值，结合改进的非单调信赖域算法，通过计算，得到了具体的MRO问题的优化设计的解，具体如上面的表5所示。

表5 不同的 $\alpha$ 值计算的结果。

$\alpha$	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
$x_1$	-0.2167	0.1724	0.1539	0.1436	0.1325	0.1304	0.1205
$x_2$	0.5826	-0.8015	-0.8576	-0.8872	-0.9168	-0.9452	-0.9785

具体不同 $\alpha$ 值下MRO问题的解的轨迹图形如下面的图2所示。

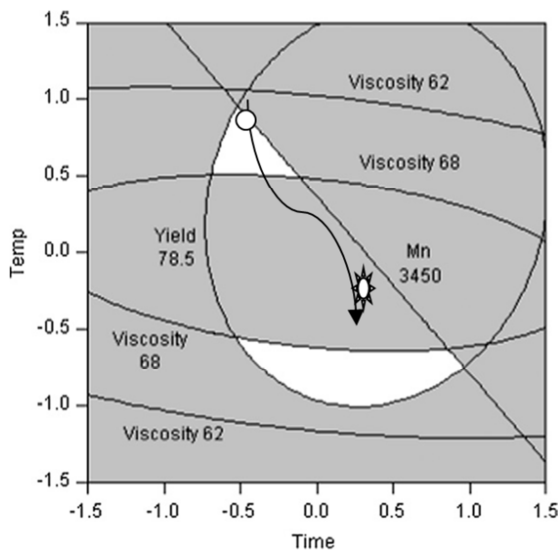


图2 MRO问题的解的轨迹。

## 6. 总结和展望

通过对一些问题的分析，MRO问题的目标函数或约束条件光滑性差，有时难以计算；总体满意度函数的表达涉及多个因素，多个局部最优解的情况经常出现。针对某一类MRO问题，结合优化的技术，我们对目标函数和约束条件进行适当的处理，一类非单调信赖域算法来调用并处理多峰函数，得到相应优化设计的结果。通过具体计算，我们的方法有效果，总体满意度数值比Derringer等人的结果有了明显的提高。

## 基金项目

常熟理工学院数学与统计学院教改课题：无纺布生产配方问题研究。

## 参考文献

[1] 张凤荣, 王丽莉. 质量管理与控制 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2006.

[2] 闻邦椿, 张国忠, 柳洪义. 面向产品广义质量的综合设计理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[3] 罗国勋. 质量管理与可靠性 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.

[4] W. Y. Sun and Y. X. Yuan, Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming. New York: Springer, 2006.

[5] Derringer, G. and Suich, R. (1980). Simultaneous optimization of several response variables. Journal of Quality Technology, 12 (4): 214–219.

[6] Derringer, G. (1994). A balancing act: optimizing a product's properties. Quality Progress, 6: 51–58.

[7] He, Z., Wang, J., Oh, J. and Park, S. H. (2010). Robust optimization for multiple responses using response surface methodology. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 26 (2): 157–171.

[8] Goethals, P. L., Cho, B. R., The development of a robust design methodology for time-oriented dynamic quality characteristics with a target profile. Quality and Reliability Engineering International, 27 (4) (2011): 403–414.

[9] Khuri, A. I. and Conlon, M. (1981). Simultaneous optimization of multiple responses represented by polynomial regression functions. Technometrics, 23 (4): 363–375.

[10] Kim, K. and Lin, D. (2000). Simultaneous optimization of multiple responses by maximizing exponential desirability functions. Applied Statistics (Journal of the Royal Statistical Society: Series C), 49 (3): 311–325.

[11] Kim, K. and Lin, D. (2006). Optimization of multiple responses considering both location and dispersion effects. European Journal of Operational Research, 169 (1): 133–145.

[12] Montgomery, D. C., Design and Analysis of Experiments (sixth ed). New York: Wiley, 2005.

[13] Myers, R. H. and Montgomery, D. C., Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments (second ed). New York: Wiley, 2002.

[14] Pignatiello, J. J. (1993). Strategies for robust multiresponse quality engineering. IIE Transactions, 25 (3): 5–15.

[15] Zhen He, Peng-fei Zhu and Sung-Hyun Park. (2012). A robust desirability function method for multi-response surface optimization considering model uncertainty, European Journal of Operational Research, 221 (1): 241–247.