



# Convergence Analysis of Iterative Learning Control for Stochastic Semilinear Generalized Distributed Parameter Systems

Zhaoqiang Ge\*

School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, China

**Email address:**

gezqjd@mail.xjtu.edu.cn (Zhaoqiang Ge)

\*Corresponding author

**To cite this article:**

Zhaoqiang Ge. (2025). Convergence Analysis of Iterative Learning Control for Stochastic Semilinear Generalized Distributed Parameter Systems. *Science Discovery*, 13(5), 101-107. <https://doi.org/10.11648/j.sd.20251305.14>

**Received:** 6 September 2025; **Accepted:** 29 September 2025; **Published:** 29 October 2025

**Abstract:** The iterative learning control problem of generalized distributed parameter systems is one of the important issues in the research of generalized distributed parameter systems. In this paper Convergence analysis of P-type iterative learning control for stochastic semilinear generalized distributed parameter systems is discussed in the sense of integral solution by GE-semigroup theory in separable Hilbert spaces. Firstly, the basic concepts of GE-semigroup and integral solution are presented, along with a description of the iterative learning control problem for stochastic semilinear generalized distributed parameter systems under P-type learning law. Secondly, some sufficient conditions are obtained, by which the input tracking and output tracking errors can converge to be bounded in the mean square sense. At the same time, we have also obtained sufficient conditions for the input tracking and output tracking errors of the semilinear generalized distributed parameter system to converge uniformly to zero.

**Keywords:** Convergence Analysis, Iterative Learning Control,

Stochastic Semilinear Generalized Distributed Parameter Systems, Integral Solution, GE-semigroup

---

## 随机半线性广义分布参数系统迭代学习控制收敛性分析

葛照强\*

西安交通大学数学与统计学院，西安，中国

**邮箱**

gezqjd@mail.xjtu.edu.cn（葛照强）

**摘要：**广义分布参数系统的迭代学习控制问题是广义分布参数系统研究的重要问题之一。本文应用GE-半群理论在积分分解的意义下讨论了可析Hilbert空间随机半线性广义分布参数系统在P-型学习律下迭代学习控制的收敛性问题。首先给出了GE-半群和积分分解的基本概念及随机半线性广义分布参数系统在P-型学习律下迭代学习控制问题的描述；其次给出了输入和输出跟踪误差在均方意义下收敛到有界的充分条件；同时得到了半线性广义分布参数系统输入和输出跟踪误差一致收敛于零的充分条件。

**关键词：**收敛性分析，迭代学习控制，随机半线性广义分布参数系统，积分分解，GE-半群

---

## 1. 引言

广义分布参数系统是许多实际问题的固有性质。研究广义分布参数系统有重要的理论及应用价值。文献[1-6]表明广义分布参数系统对复合材料中的温度分布问题,经济学中的投入产出分析问题等的研究有重要意义。论文[7, 8]表明研究广义分布参数系统的迭代学习控制问题有重要的理论及应用价值。文献[9-14]表明渗流自由面的演化问题, DNA分子中纵波的传播问题等都可通过广义分布参数系统进行描述。随着高新技术的深入发展,对广义分布参数系统的研究显得更加重要。

广义分布参数系统的迭代学习控制是广义分布参数系统研究的重要问题之一。研究广义分布参数系统的迭代学习控制问题有重要的理论及应用价值。关于广义分布参数系统迭代学习控制问题的研究可以追溯到2016年,从那时起有关学者就开始研究由某种特殊的偏微分方程形式给出的广义分布参数系统的迭代学习控制问题。

2016年,文献[7]研究了一类时滞非线性广义分布参数系统的迭代学习控制问题,通过一种广义P-型算法给出了输出跟踪误差一致有界的充分条件。2017年,文献[8, 15, 16]研究了由时间导数项系数矩阵为奇异矩阵的抛物型和双曲型偏微分方程描述的特殊线性广义分布参数系统的迭代学习控制问题,应用P-型学习律给出了输出跟踪误差以 $L^2$ 范数收敛到零的充分条件。2018年,文献[17]研究了一类导数项系数矩阵为奇异矩阵的半线性方程描述的半线性广义分布参数的迭代学习控制问题。应用带有初值修改项的PD-型学习律,得到了输出跟踪误差以 $L^2$ 范数收敛于零的充分条件。2019年,文献[18]考虑了一类由时间导数项系数矩阵为奇异矩阵的抛物型方程描述的线性广义分布参数系统的迭代学习控制问题。应用PD-型学习律给出了输出跟踪误差以 $L^2$ 范数收敛于零的充分条件。2020年,文献[19]讨论了[18]中的广义分布参数系统离散化后所得

到的离散广义分布参数系统的迭代学习控制问题。应用P-型学习律得到了系统收敛的充分条件。2021年,文献[20]研究了一类抛物型线性广义分布参数系统的混合PD-型迭代学习控制算法,给出了输出跟踪误差收敛的充分条件。同年,文献[21]研究了一类由时间导数项系数矩阵为奇异矩阵的抛物型方程给出的线性广义分布参数系统的迭代学习控制问题。应用D-型学习律给出了输出跟踪误差以 $L^2$ 范数收敛于零的充分条件。

就以上的研究来看,关于连续广义分布参数系统的迭代学习控制问题都是在系统强解[6, 22]意义下进行的,这样就限制了迭代学习控制理论的应用范围。此外,关于随机广义分布参数系统的迭代学习控制问题目前尚未见到有关研究结果,而随机广义分布参数系统对许多实际问题的研究也十分重要[6, 22-25]。鉴于以上,本文应用GE-半群理论[24],在积分解[25, 26] (积分解比强解的适应范围更广)的意义下,研究一般随机半线性广义分布参数系统迭代学习控制收敛性问题。

本文结构如下。在第二节中主要给出随机半线性广义分布参数系统迭代学习控制问题的描述;在第三节中应用P-型学习律分析系统的收敛性问题;最后在第四节中给出结论。

符号说明:  $X, U, W, Y$ 分别表示实的可析的Hilbert空间;  $S, C$ 分别表示实数和复数全体所构成的集合;  $(\Omega, F, \Gamma)$ 表示一个完全概率空间;  $G$ 表示数学期望算子;  $\|\cdot\|$ 表示范数;  $\mu$ 是一个正常数,  $\alpha(t)$ 是 $[0, a]$ 上的一个有界函数,  $\alpha(t)$ 的 $\mu$ 范数为  $\|\alpha\|_\mu = \sup\{e^{-\mu t} \|\alpha(t)\|, t \in [0, a]\}$ ;  $D(A)$ 表示算子 $A$ 的定义域。

## 2. 问题的描述

考虑如下形式的重复运动随机半线性广义分布参数系统:

$$\begin{aligned} Hdh_i(t) &= [Jh_i(t) + Rr_i(t)]dt + l(h_i(t), r_i(t), t)dt + Mdw_i(t), \\ s_i(t) &= Oh_i(t) + Zr_i(t), \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $t \in [0, a]$ ,  $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ;  $h_i(t) \in X, r_i(t) \in U, s_i(t) \in Y$ 分别表示状态向量过程, 输入向量过程和输出向量过程;  $w_i(t) \in W$ 是定义在  $(\Omega, F, \Gamma)$ 上的标准Wiener过程;  $J: D(J) \rightarrow X$ 是一个闭线性算子;

$$H: X \rightarrow X, R: U \rightarrow X, O: X \rightarrow Y, Z: U \rightarrow Y, M: W \rightarrow X$$

都是有界线性算子; 非线性算子 $l: X \times U \times [0, +\infty] \rightarrow X$ 连续, 且存在正常数 $c_l$ 使

$$G\|l(h_1, r_1, t) - l(h_2, r_2, t)\|^2 \leq c_l G(\|h_1 - h_2\|^2 + \|r_1 - r_2\|^2) \quad (2)$$

对任意 $h_1, h_2 \in X$ ;  $r_1, r_2 \in U$ 成立。

为了研究随机半线性广义分布参数系统(1)的收敛性, 需下面的概念和假设。

定义1 设 $V(t): X \rightarrow X, t \geq 0$ 是一个有界线性算子族, 如果 $V(t+s) = V(t)HV(s), t, s \geq 0$ , 则称 $V(t)$ 是由 $H$ 引导的一个GE-半群, 简称GE-半群。

如果  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|V(t)h - V(0)h\| = 0$  对任意的 $h \in X$ 成立, 则称  $V(t)$  是强连续的。

如果 $V(t)$ 是强连续的, 且在强收敛的意义下

$$Jh = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{HV(t)H - HV(0)H}{t} h$$

对任意的  $h \in D$ 成立, 其中

$$D = \left\{ h: h \in D(J), V(0)Hh = h, \exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{HV(t)H - HV(0)H}{t} h \right\},$$

则称 $J$ 为 $V(t)$ 的生成元。

定义2 如果  $\gamma H(\gamma H - J)^{-1}$  在  $\gamma \rightarrow +\infty$ 时强收敛, 则随机半线性广义分布参数系统(1)的积分解定义为:

$$\begin{aligned} h_i(t) &= V(t)Hh_i(0) + \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \gamma \left[ \int_0^t V(t-s)H(\gamma H - J)^{-1} \cdot Rr_i(s)ds + \int_0^t V(t-s)H(\gamma H - J)^{-1}Mdw_i(s) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t V(t-s)H(\gamma H - J)^{-1}l(h_i(s), r_i(s), s)ds \right]. \end{aligned}$$

本文假设如下条件成立:

(H<sub>1</sub>)  $J$  是  $H$  引导的  $V(t)$  的生成元, 且常数  $c_V > 0$  满足  $\|V(t)\| \leq c_V, t \in [0, a]$ 。

(H<sub>2</sub>) 存在常数  $c > 0, \omega \in S$  使  $(\omega, +\infty)$  包含在  $\rho(H, J)$ , 其中  $\rho(H, J) = \{\gamma \in C: \exists H(\gamma H - J)^{-1}\}$ ,

$$\|H(\gamma H - J)^{-1}\| \leq \frac{c}{\gamma - \omega}, \gamma > \omega,$$

且  $\gamma H(\gamma H - J)^{-1}$  当  $\gamma \rightarrow +\infty$  时强收敛。

(H<sub>3</sub>) 期望输出  $s_d(t)$  在  $[0, a]$  上连续, 且存在唯一的期望输入  $r_d(t)$  在积分解的意义下满足

$$\begin{aligned} H \frac{dh_d(t)}{dt} &= Jh_d(t) + Rr_d(t) + l(h_d(t), r_d(t), t) \\ s_d(t) &= Oh_d(t) + Zr_d(t), \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $h_d(t) \in X, r_d(t) \in U, s_d(t) \in Y$ 。

(H<sub>4</sub>)  $h_i(0) = h_d(0)$  是确定的, 且

$$s_d(0) = Oh_d(0) + Zr_d(0), \Delta r_i(0) = r_d(0) - r_i(0),$$

且  $\Delta r_i(0)$  有界。

迭代学习控制是一种控制方法, 它反复应用先前试验得到的信息, 以获得能够产生期望输出轨迹的控制输入, 改善控制质量。迭代学习控制的任务是: 对于给定的期望目标, 确定期望学习控制, 使得迭代学习序列跟踪期望控制输入时, 相应的被控系统在某种解的意义下对应的输出跟踪期望输出目标。

本文对随机半线性广义分布参数系统(1)采用P-型学习律, 即

$$r_{i+1}(t) = r_i(t) + P\Delta s_i(t), t \in [0, a], \quad (4)$$

其中  $\Delta s_i(t) = s_d(t) - s_i(t)$  为输出跟踪误差, 有界线性算子  $P: Y \rightarrow U$  为学习增益算子。

定义状态误差  $\Delta h_i(t)$ , 输入误差  $\Delta r_i(t)$  和  $\Delta l_i(t)$  如下:

$$\begin{aligned} \Delta h_i(t) &= h_d(t) - h_i(t), \Delta r_i(t) = r_d(t) - r_i(t), \\ \Delta l_i(t) &= l(h_d(t), r_d(t), t) - l(h_i(t), r_i(t), t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G\|\Delta h_i(t)\|^2 &\leq 3c_V^2 c^2 \|R\|^2 G(\int_0^t \|\Delta r_i(s)\| ds)^2 + G(\int_0^t \|\Delta l_i(s)\| ds)^2 + 3c_V^2 c^2 a \|M\|^2 \\ &\leq 3c_V^2 c^2 a [\|R\|^2 \int_0^t G\|\Delta r_i(s)\|^2 ds + c_l \int_0^t G(\|\Delta h_i(s)\|^2 + \|\Delta r_i(s)\|^2) ds + 3c_V^2 c^2 a \|M\|^2]. \end{aligned} \quad (11)$$

在(11)式两边同乘以  $e^{-2\mu t}$ , 有

$$\begin{aligned} e^{-2\mu t} G\|\Delta h_i(t)\|^2 &\leq 3c_V^2 c^2 a [\|R\|^2 \int_0^t G\|\Delta r_i(s)\|^2 e^{-2\mu s} ds \\ &\quad + c_l \int_0^t G(\|\Delta h_i(s)\|^2 + \|\Delta r_i(s)\|^2) e^{-2\mu s} ds] + 3e^{-2\mu t} \|M\|^2 c_V^2 c^2 a. \end{aligned} \quad (12)$$

由于  $\mu > 0$ , 故  $e^{-2\mu t} \in (0, 1], t \in [0, a]$ 。从而

$$3c_V^2 c^2 \|M\|^2 a e^{-2\mu t} \leq 3c_V^2 c^2 a \|M\|^2. \quad (13)$$

把(13)代入(12), 由  $\mu$ -范数的定义, 可得

$$G\|\Delta h_i\|_\mu^2 \leq 3c_V^2 c^2 a [\frac{\|R\|^2}{2\mu} G\|\Delta r_i\|_\mu^2 + c_l \frac{G(\|\Delta h_i\|_\mu^2 + \|\Delta r_i\|_\mu^2)}{2\mu}] + 3c_V^2 c^2 \|M\|^2 a. \quad (14)$$

由系统(1)和(3)可得:

$$\Delta s_i(t) = O\Delta h_i(t) + Z\Delta r_i(t). \quad (5)$$

根据P-型迭代学习控制率(4), 第  $(i+1)$  次输入误差为

$$\begin{aligned} \Delta r_{i+1}(t) &= r_d(t) - r_{i+1}(t) = r_d(t) - r_i(t) - P\Delta s_i(t) \\ &= \Delta r_i(t) - P[O\Delta h_i(t) + Z\Delta r_i(t)] \\ &= (I - PZ)\Delta r_i(t) - PO\Delta h_i(t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $I$  表示恒等算子。此外由系统(1)和(3)可得

$$\begin{aligned} H\Delta h_i(t) &= H[h_d(t) - h_i(t)] \\ &= [Jh_d(t) + Rr_d(t) + l(h_d(t), r_d(t), t)]dt - [Jh_i(t) + Rr_i(t) + l(h_i(t), r_i(t), t)]dt - Mdw_i(t) \\ &= [J\Delta h_i(t) + R\Delta r_i(t) + \Delta l_i(t)] - Mdw_i(t). \end{aligned} \quad (7)$$

由定义2和 (H<sub>4</sub>), 系统(7)的积分解为

$$\begin{aligned} \Delta h_i(t) &= \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \gamma [\int_0^t V(t-s)H(\gamma H - J)^{-1}R\Delta r_i(s)ds \\ &\quad + \int_0^T V(t-s)H(\gamma H - J)^{-1}\Delta l_i(s)ds \\ &\quad - \int_0^T V(t-s)H(\gamma H - J)^{-1}Mdw_i(s)]. \end{aligned} \quad (8)$$

### 3. 收敛性分析

本节研究输入跟踪误差和输出跟踪误差的收敛性问题。

定理1 对于随机半线性广义分布参数系统(1)和P-型学习律(4), 假设(H<sub>1</sub>)-(H<sub>4</sub>) 成立。如果学习增益算子  $P$  满足

$$\|I - PZ\|^2 = \beta < 1/2, \quad (9)$$

则存在常数  $c_1 > 0$ , 使

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} G\|\Delta r_i(t)\|^2 \leq c_1, \forall t \in [0, a]. \quad (10)$$

证明 由(8)可得

由(14), 有

$$G\|\Delta h_i\|_\mu^2 \leq 3c_V^2 c^2 a \frac{(\|R\|^2 + c_l)G\|\Delta r_i\|_\mu^2}{2\mu - 3c_V^2 c^2 a c_l} + \frac{6c_V^2 c^2 \|M\|^2 a \mu}{2\mu - 3c_V^2 c^2 a c_l}. \quad (15)$$

又由(6), 可得

$$\begin{aligned} \|\Delta r_{i+1}(t)\|^2 &= \|(I - PZ)\Delta r_i(t) - PO\Delta h_i(t)\|^2 \\ &\leq 2[\|(I - PZ)\Delta r_i(t)\|^2 + \|PO\Delta h_i(t)\|^2] \\ &\leq 2\beta\|\Delta r_i(t)\|^2 + 2\|PO\|^2\|\Delta h_i(t)\|^2. \end{aligned} \quad (16)$$

由此可得

$$G\|\Delta r_{i+1}\|_\mu^2 \leq 2\beta G\|\Delta r_i\|_\mu^2 + 2\|PO\|^2 G\|\Delta h_i\|_\mu^2. \quad (17)$$

把(15)代入(17), 可得

$$G\|\Delta r_{i+1}\|_\mu^2 \leq (2\beta + \frac{6c_V^2 c^2 a \|PO\|^2 (\|R\|^2 + c_l)}{2\mu - 3c_V^2 c^2 a c_l})G\|\Delta r_i\|_\mu^2 + \frac{12\mu c_V^2 c^2 a (\|M\| \|PO\|)^2}{2\mu - 3c_V^2 c^2 a c_l}. \quad (18)$$

令

$$\begin{aligned} \zeta &= 2\beta + \frac{6c_V^2 c^2 a \|PO\|^2 (\|R\|^2 + c_l)}{2\mu - 3c_V^2 c^2 a c_l}, \\ \eta &= \frac{12\mu c_V^2 c^2 a (\|M\| \|PO\|)^2}{2\mu - 3c_V^2 c^2 a c_l}, \\ \alpha_i &= G\|\Delta r_i\|_\mu^2. \end{aligned}$$

则(18)可写为

$$\alpha_{i+1} \leq \zeta \alpha_i + \eta. \quad (19)$$

由于  $2\beta < 1$ , 可选取充分大的  $\mu$  使  $0 < \zeta < 1$ . 由 (19), 有

$$\begin{aligned} i &= 0, \alpha_1 \leq \zeta \alpha_0 + \eta, \\ i &= 1, \alpha_2 \leq \zeta \alpha_1 + \eta \leq \zeta^2 \alpha_0 + \zeta \eta + \eta, \\ i &= 2, \alpha_3 \leq \zeta \alpha_2 + \eta \leq \zeta^3 \alpha_0 + \zeta^2 \eta + \zeta \eta + \eta, \\ &\dots\dots \\ i &= n, \alpha_{n+1} \leq \zeta \alpha_n + \eta \leq \zeta^{n+1} \alpha_0 + \eta(\zeta^i + \dots + \zeta + 1). \end{aligned}$$

从而对于  $i$ , 有

$$\alpha_{i+1} \leq \zeta \alpha_i + \eta \leq \zeta^{i+1} \alpha_0 + \eta(\zeta^i + \dots + \zeta + 1) = \zeta^{i+1} \alpha_0 + \frac{1 - \zeta^{i+1}}{1 - \zeta} \eta. \quad (20)$$

式(20)表明

$$G\|\Delta r_{i+1}\|_\mu^2 \leq \zeta G\|\Delta r_i\|_\mu^2 + \eta \leq \zeta^{i+1} G\|\Delta r_0\|_\mu^2 + \frac{1 - \zeta^{i+1}}{1 - \zeta} \eta. \quad (21)$$

由于

$$G\|\Delta r_{i+1}(t)\|^2 = e^{-2\mu t} G\|\Delta r_{i+1}(t)\|^2 e^{2\mu t} \leq G\|\Delta r_{i+1}\|_\mu^2 e^{2\mu a}. \quad (22)$$

由(21), 有

$$e^{2\mu a} G\|\Delta r_{i+1}(t)\|_\mu^2 \leq e^{2\mu a} \left( \zeta^{i+1} G\|\Delta r_0\|_\mu^2 + \frac{1 - \zeta^{i+1}}{1 - \zeta} \eta \right). \quad (23)$$

由(22)和(23), 可得

$$G\|\Delta r_{i+1}(t)\|^2 \leq e^{2\mu a} \left( \zeta^{i+1} G\|\Delta r_0\|_\mu^2 + \frac{1 - \zeta^{i+1}}{1 - \zeta} \eta \right),$$

而  $0 < \zeta < 1$ , 故

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} G\|\Delta r_i(t)\|^2 \leq c_1, \forall t \in [0, a], \quad (24)$$

其中  $c_1 = e^{2\mu a} \frac{\eta}{1 - \zeta}$ 。

定理1表明, 随机半线性广义分布参数系统在积分解意义下的输入误差的均方收敛性依赖于重复随机半线性广义分布参数系统的随机项的值。此外, 有如下推论。

推论1 在随机半线性广义分布参数系统(1)中, 如果  $M = 0$ ,  $(H_1)-(H_4)$ 成立,  $\|I - PZ\|^2 < \frac{1}{2}$ , 则

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \|\Delta r_i\|_\mu^2 = 0.$$

推论1表明, 如果随机半线性广义分布参数系统(1)无随机项, 则所得到的半线性广义分布参数系统在

$$\|I - PZ\|^2 < \frac{1}{2}$$

的条件下, 输入误差在 $[0, a]$ 上一致收敛于零。

定理2 对于随机半线性广义分布参数系统(1)及P-型学习律(4), 设(H<sub>1</sub>)-(H<sub>4</sub>)成立。如果学习增益算子 $P$ 满足(9), 则存在常数 $c_2 > 0$ , 使

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} G\|\Delta s_i(t)\|^2 \leq c_2, \forall t \in [0, a]. \quad (25)$$

证明 由(5)和(11), 有

$$\begin{aligned} G\|\Delta s_i(t)\|^2 &= G\|O\Delta h_i(t) + Z\Delta r_i(t)\|^2 \leq 2G(\|O\Delta h_i(t)\|^2 + \|Z\Delta r_i(t)\|^2) \\ &\leq 6\|O\|^2 c_V^2 c^2 a[(\|R\|^2 + c_l) \int_0^t G\|\Delta r_i(s)\|^2 ds + c_l \int_0^t G\|\Delta h_i(s)\|^2 ds] + 6\|O\|^2 c_V^2 c^2 \|M\|^2 a + 2\|Z\|^2 G\|\Delta r_i\|^2. \end{aligned} \quad (26)$$

由 $\mu$ -范数的定义和 (26), 有

$$\begin{aligned} e^{-2\mu t} G\|\Delta s_i(t)\|^2 &\leq 6\|O\|^2 c_V^2 c^2 a \times \\ &[(\|R\|^2 + c_l) \int_0^t G\|\Delta r_i(s)\|^2 ds + c_l \int_0^t G\|\Delta h_i(s)\|^2 ds] e^{-2\mu t} + (6\|O\|^2 c_V^2 c^2 \|M\|^2 a + 2\|Z\|^2 G\|\Delta r_i(t)\|^2) e^{-2\mu t}. \end{aligned} \quad (27)$$

由(15)和(27), 有

$$\begin{aligned} G\|\Delta s_i\|_\mu^2 &\leq \frac{3}{\mu} \|O\|^2 c_V^2 c^2 a \times [(\|R\|^2 + c_l) G\|\Delta r_i\|_\mu^2 + c_l G\|\Delta h_i\|_\mu^2] + 6\|O\|^2 c_V^2 c^2 a \|M\|^2 + 2\|Z\|^2 G\|\Delta r_i\|_\mu^2 \\ &= \zeta_1 G\|\Delta r_i\|_\mu^2 + \eta_1, \end{aligned} \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{3\|O\|^2 c_V^2 c^2 a(\|R\|^2 + c_l)}{\mu} \left(1 + \frac{3c_V^2 c^2 a c_l}{2\mu - 3c_V^2 c^2 a c_l}\right) + 2\|Z\|^2, \\ \eta_1 &= \frac{18\|O\|^2 c_V^4 c^4 a^2 c_l \|M\|^2}{2\mu - 3c_V^2 c^2 a c_l} + 6\|O\|^2 c_V^2 c^2 a \|M\|^2. \end{aligned}$$

根据(28), 利用(20)的推导过程, 可得

$$G\|\Delta s_i\|_\mu^2 \leq \zeta_1 \zeta^2 G\|\Delta r_0\|_\mu^2 + \frac{\zeta_1 \eta}{1 - \zeta} + \eta_1. \quad (29)$$

从而

$$e^{2\mu a} G\|\Delta s_i\|_\mu^2 \leq (\zeta_1 \zeta^i G\|\Delta r_i\|_\mu^2 + \frac{\zeta_1 \eta}{1 - \zeta} + \eta_1) e^{2\mu a}. \quad (30)$$

由 $\mu$ -范数的定义, 有

$$G\|\Delta s_i(t)\|^2 \leq e^{-2\mu t} G\|\Delta s_i(t)\|^2 e^{2\mu t} \leq G\|\Delta s_i\|_\mu^2 e^{2\mu t}. \quad (31)$$

由(30)和(31), 可得

$$G\|\Delta s_i(t)\|^2 \leq e^{2\mu a} (\zeta_1 \zeta^i G\|\Delta r_0\|_\mu^2 + \frac{\zeta_1 \eta}{1 - \zeta} + \eta_1). \quad (32)$$

因此, 由(32), 有

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} G\|\Delta s_i(t)\|^2 \leq c_2, \forall t \in [0, a], \quad (33)$$

其中  $c_2 = e^{2\mu a} \left(\frac{\zeta_1 \eta}{1 - \zeta} + \eta_1\right)$ 。

定理2表明, 随机半线性广义分布参数系统在积分解意义下的输出跟踪误差的均方收敛性依赖于重复随机半线性广义分布参数系统的随机项的值。此外, 有如下推论。

推论2 在随机半线性广义分布参数系统(1)中, 如果 $M = 0$ , (H<sub>1</sub>)-(H<sub>4</sub>)成立,  $\|I - PZ\|^2 < \frac{1}{2}$ , 则

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \|\Delta s_i\|_\mu^2 = 0.$$

推论2表明, 如果随机半线性广义分布参数系统(1)无随机项, 则所得到的半线性广义分布参数系统在



$$\|I - PZ\|^2 < \frac{1}{2}$$

时, 输出跟踪误差在 $[0, a]$ 上一致收敛于零。

例1 根据 [6], 经济学中的投入产出模型可以写成随机半线性广义分布参数系统(1)的形式。如果系统(1)中的算子取如下的形式:

$$H = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} -2I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 3I_1 & 0 \\ 0 & 2I_2 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 3I_2 \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 2I_1 & 0 \\ 0 & 3I_2 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 2I_2 \end{bmatrix},$$

$$l(h_i(t), r_i(t), t) = \begin{bmatrix} \theta \\ l_2(h_i(t), r_i(t), t) \end{bmatrix},$$

其中  $I_1, I_2$  分别是可析Hilbert空间  $X_1, X_2$ 上的恒等算子;  $X = X_1 \oplus X_2$ ,  $\oplus$  表示直和;  $X = Y = U = W$ ;

$$h_i(t) = \begin{bmatrix} h_i^1(t) \\ h_i^2(t) \end{bmatrix}, r_i(t) = \begin{bmatrix} r_i^1(t) \\ r_i^2(t) \end{bmatrix}, w_i(t) = \begin{bmatrix} w_i^1(t) \\ w_i^2(t) \end{bmatrix}, s_i(t) = \begin{bmatrix} s_i^1(t) \\ s_i^2(t) \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}I_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}I_2 \end{bmatrix},$$

$\theta \in X_1$ 是常向量,  $l$ 连续且满足(2), 则可得GE-半群 $V(t)$ 为

$$V(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t}I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \gamma H(\gamma H - J)^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\gamma \rightarrow +\infty)$$

在强收敛的意义下成立。假定  $(H_4)$  成立, 此时不难验证重复系统和期望系统分别有唯一的积分解,  $(H_1) - (H_3)$  成立, 且

$$\|I - PZ\|^2 = \frac{1}{9} < \frac{1}{2},$$

即(9)成立。由定理1和2, 在以上条件下由随机半线性广义分布参数系统所描述的投入产出系统的输入和输出跟踪误差在均方意义下收敛到有界。由推论1和2, 如果系统无随机项, 则有广义分布参数系统所描述的投入产出系统的输入和输出跟踪误差在 $[0, a]$ 上一致收敛于零。

此外, 类似于文献[24]附录中例1, 也可以给出由广义抛物型偏微分方程描述的随机半线性广义分布参数系统在本文意义下的迭代学习控制问题的收敛性来说明本文结果的有效性。对此不再做详细叙述。

## 4. 结论

应用GE-半群理论在积分解的意义下讨论了可析Hilbert空间中随机半线性广义分布参数系统在P-型迭代学习控制下的收敛性问题。证明了输入和输出跟踪误差在一定的条件下可均方收敛到有界。表明了输入和输出跟踪误差的均方收敛依赖于重复随机半线性广义分布参数系统的随机项的值; 当该系统中无随机项时, 所得到的半线性广义分布参数系统的输入和输出跟踪误差一致收敛于零。

## 致谢

本文为国家自然科学基金数学天元基金项目《Banach空间中时变随机广义发展方程的精确能控性问题研究》(12126401)的阶段性成果之一。

## ORCID

0000-0002-1550-096X (Zhaoqiang Ge)

## 参考文献

- [1] 葛照强, 朱广田, 冯德兴. Hilbert空间中广义分布参数系统的精确能控性 [J]. 中国科学: 信息科学, 2009, 39(11): 1210-1216.
- [2] 葛照强, 朱广田, 冯德兴. 广义算子半群与广义分布参数系统的适定性 [J]. 中国科学: 数学, 2010, 40(5): 477-495.
- [3] 葛照强, 冯德兴. Banach空间中时变广义分布参数系统的可解性 [J]. 中国科学: 信息科学, 2013, 43: 386-406.
- [4] Ge Z Q, Feng D X. Solvability of a time-varying singular distributed parameter system in Banach space [J]. Sci Sin Inform, 2013, 56: 128201:1-128201:14.
- [5] 葛照强, 冯德兴. 非线性时变广义分布参数系统的适定性 [J]. 中国科学: 数学, 2014, 44: 1277-1298.
- [6] Liaskos K B, Pantelous A A, Stratis I G. Linear stochastic degenerate Sobolev equations and applications [J]. Int J Control, 2015, 88: 2538-2553. <https://doi.org/10.1080/00207179.2015.1048482>
- [7] Zhang Y, Li Y, Su J. Singular distributed parameter system iterative learning control with forgetting factor with time delay [J]. International Journal of u- and e- Service, Science and Technology, 2016, 9(7): 1-8. <https://doi.org/10.14257/ijuness.2016.9.7.01>
- [8] Dai X S, Zhou X Y, Tian S P, Ye H T. Iterative learning control for MIMO singular distributed parameter systems. IEEE Access, 2017, 5: 24094-24104. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2017.2768480>
- [9] 葛照强, 冯德兴. 广义分布参数系统与广义集中参数系统耦合系统的极点配置问题 [J]. 中国科学: 信息科学, 2017, 47: 326-336.
- [10] Jiang Y S, Zhang Q L, Li L. State feedback control on singular distributed parameter system with parabolic-elliptic type [C]. In: Proceeding of 28th Chinese Control and Decision Conference (CCDC), 2017. 261-265.

- [11] Jiang Y S, Liu C, Zhang Q L, Zhang T Y. Two side observer for singular distributed parameter systems [J]. *System & Control Letters*, 2019, 124: 112-120.
- [12] Ge Z Q, Ge X C, Zhang J F. Approximate controllability and approximate observability of singular distributed parameter systems [J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2020, 65: 2294-2299. <https://doi.org/10.1109/TAC.2019.2920215>
- [13] Jacob B, Morris K. On solvability of dissipative partial differential-algebraic equation [J]. *IEEE Control System Letters*, 2022, 6: 3188-3193.
- [14] Bortolan M C, Brito M C A, Dantas F. Well-posedness of linear singular evolution equation in Banach space: theoretical results [J]. *Anal Math*, 2025, 51: 99-128.
- [15] Zhou X, Dai X, Tian S, Mei S. Iterative learning control for a class of singular distributed parameter systems [C]. In: *Proceedings of 6th data driven control and learning system*, 2017. 42-47.
- [16] Zhou X Y, Dai X S, Wang D X, Qi M M. Iterative learning control for MIMO singular distributed parameter system with parabolic type [C]. In: *Proceedings of 2017 Chinese Automation Congress (CAC)*, 2017. 4093-4098.
- [17] Lan Z M, Zhang Y J, Chen M J. Iterative learning controller design for nonlinear generalized distributed parameter system with correction factor [J]. *Engineering Intelligent Systems*, 2018, 2-3: 139-145.
- [18] Zhang Y J, Li Y H, Chen M J. Iterative learning control for linear generalized distributed parameter system [J]. *Neural Computing and Applications*, 2019, 31: 4503-4512. <https://doi.org/10.1007/s00521-018-3835-0>
- [19] Chen M J, Zhang Y J. Iterative learning control of discrete generalized distributed parameter [C]. In: Xu Z, Choo K K R, Dehghantanha A, Parizi R, Hammoudeh M (eds). *Cyber Security Intelligence and Analysis*. CSIA 2019. *Advance in Intelligent Systems and Computing*, vol 298. Spring, 2020, 407-414.
- [20] De X S, Zhou X Y. Mixed PD-type iterative learning control algorithm for a class of parabolic singular distributed parameter systems [J]. *IEEE Access*, 2021, 9: 12180-12190. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3050481>
- [21] Li G, Hou L, Lu Y. D-type iterative learning control for open container motion system with sloshing contains [J]. *IEEE Access*, 2021, 9: 136666-136673. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3117730>
- [22] Liaskos K B, Stratis I G, Pantelous A A. Stochastic degenerate Sobolev equation: Well posedness and exact controllability [J]. *Math Meth Appl Sci*, 2018, 41: 1025-1032.
- [23] Ge Z Q. GE-evolution operator method for controllability of time varying stochastic descriptor systems in Hilbert spaces [J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2022, 39: 80-92. <https://doi.org/10.1093/imamci/dnab038>
- [24] Ge Z Q. GE-semigroup method for controllability of stochastic descriptor linear systems [J]. *Sci China Inf Sci*, 2023, 66: 139201, 1-2. <https://doi.org/10.1007/s11432-020-3288-x>
- [25] Ge Z Q. Controllability of semilinear stochastic generalized system in Hilbert spaces by GE-evolution operator method [J]. *Mathematics*, 2023, 11: 743, 1-26. <https://doi.org/10.3390/math11030743>
- [26] Ge Z Q. Controllability of semilinear integrodifferential degenerate Sobolev equations [J]. *J Syst Sci Complex*, 2024, 37: 1923-1936. <https://doi.org/10.1007/s11424-024-3181-5>